

文章编号: 1000 8055(2008)01 0037-07

辛算法在随机振动响应求解中的应用

罗务揆^{1,2}, 邢誉峰², 杨 蓉²

(1. 中航第一飞机研究院 西安 710089;
2. 北京航空航天大学 航空科学与工程学院 北京 100083)

摘 要: 以能量差为基础的等效线性化方法来线性化 Duffing 系统, 然后结合虚拟激励法和四阶辛差分格式来求解线性系统的随机响应问题, 从而得到了一套高效高精度求解动力系统随机响应的方法. 数值结果验证了该结论的正确性.

关 键 词: Duffing 振子; 虚拟激励法; 辛算法; 等效线性化方法; 方程差; 能量差

中图分类号: O343

文献标识码: A

Application of symplectic geometry algorithm to the calculation of random response of the dynamic system

LUO Wu-kui^{1,2}, XING Yufeng², YANG Rong²

(1. The First Aircraft Institute of China Aviation Industry Corporation I, Xi'an 710089, China;
2. School of Aeronautics Science and Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: Duffing system was linearized by equivalent linearization method based on energy difference, then, the random response of the linear system was solved by combining the pseudo excitation method and four-order symplectic geometry algorithm. It is concluded that an approach to combine the pseudo excitation method, symplectic geometry algorithm and equivalent linearization method is accurate and efficient.

Key words: duffing system; pseudo excitation method; symplectic geometry algorithm; equivalent linearization method; equation difference; energy difference

动力系统在随机激励下的响应统计特性计算一直是科学研究和实际工程关心的问题. 根据林家浩教授提出的虚拟激励法^[1], 可以有效地解决线性随机振动中的精度和效率两方面问题.

但是, 针对一般的线性系统, 使用经典直接积分方法求解响应时, 系统的能量不能保持守恒(相当于不能保结构或保辛), 使得系统的总能量随时间呈现变化, 从而导致不能正确的反应相应系统的长期演化性态^[2], 这种情况被称为“人工阻尼”或“算法阻尼”, 这是积分法选用所带来的, 是无可

奈何的. 从工程实际角度而言, 探索能够反映非线性系统长期行为并且具有很好的稳定性的算法是非常必要的, 辛几何算法不仅是一种新的数值方法^[3,4], 而且能从理论上阐明传统数值方法导致能量耗散的根本原因, 在新的体系中寻找求解动力学方程的数值解法并得以实施就很有意义了.

非线性系统在随机激励下的响应统计特性计算远比线性系统复杂. 对于非常简单的系统, 通过求解 FPK (Fokker-Planck-KOJI MOΓOPOB, 福克-普朗克-柯尔莫哥罗夫) 方程得到问题的解析

解,虽然这种做法远不能用于解决实际问题,但可用得到的解析解来检验一些近似方法的精度。

结合传统的等效线性化方法,可以把虚拟激励法和精细积分法用于处理非线性随机振动问题,但结果的精度有待提高,林家浩教授指出其误差主要来自等效线性化方法。以方程差为基础的等效线性化法其实只是对力的等效,并没有反映出真实的物理模型和过程。能量可以用来全面衡量系统的物理特性,因此,从理论上来说,以能量差为基础的等效线性化方法应该具有更高的精度。

本文首先介绍三种主要方法,然后以能量差为基础的等效线性化方法来线性化 Duffing 振子,最后结合虚拟激励法和四阶辛差分格式来求解线性系统的随机响应问题,并且比较了各种算法的精度。

1 虚拟激励法^[1]

虚拟激励法的思想是将一个包含随机载荷功率谱信息的虚拟载荷加到原系统上,求出的虚拟响应包含了真实响应的功率谱信息,通过计算虚拟响应模的平方值可得到响应的功率谱密度。

线性系统受到自谱密度为 $S_{xx}(\omega)$ 的单点平稳随机激励 $x(t)$ 时,响应 y 的自功率谱 $S_{yy}(\omega)$ 可写成

$$S_{yy}(\omega) = |H|^2 S_{xx}(\omega) \quad (1)$$

H 为频率响应函数。对于激励 $x(t) = e^{i\omega t}$, 响应为 $y(t) = H e^{i\omega t}$, 对虚拟激励 $\tilde{x}(t) = \sqrt{S_{xx}} e^{i\omega t}$, 虚拟响应为 $\tilde{y}(t) = \sqrt{S_{xx}} H e^{i\omega t}$ 。而

$$\tilde{y}^* \tilde{y} = |\tilde{y}|^2 = |H|^2 S_{xx} = S_{yy} \quad (2)$$

这是虚拟激励法的最基本原理,可由随机激励的自谱密度直接得到响应谱密度。

对于受多点载荷的系统,传统方法需要求出单个激励对应的频率响应函数,并求出各个载荷对响应功率谱的贡献(根据方法不同,考虑是否包括载荷间的相互影响),并对各个贡献求和得到最终的响应功率谱。而虚拟激励法将包含了载荷功率谱信息的所有虚拟激励一次代入系统动力方程,相当于用一个与之对应的频率响应函数求出了虚拟响应,进而求出响应功率谱。整个过程没有近似与省略,结果是确定性和解析的,并且大幅度提高了计算的效率。

2 四阶辛差分格式^[2]

辛几何是面积的几何学,研究辛几何在数值

分析中的应用,使得离散化后的方程保持原有系统的辛结构,它的离散相流可看成一系列离散辛变换,从而保持一系列相面积和相体积守恒。在实际的物理过程中,能量是系统运动特征的一个重要参数,辛几何的这种保持也就是保持了系统的能量和结构,从而在辛几何空间中讨论系统特征将更具有实际意义。

已知一般动力学方程的形式为

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = R \quad (3)$$

令

$$X = -M^{-1}Y \quad (4)$$

可以得到

$$\left. \begin{aligned} X &= -M^{-1}Y \\ Y &= -R - CM^{-1}Y + KX \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

令

$$Z = \{X \ Y\}^T \quad (6)$$

则有

$$\frac{dZ}{dt} = f(Z) = \left\{ \begin{aligned} -M^{-1}Y \\ -R - CM^{-1}Y + KX \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

单步二级 R-K 辛差分格式方法的形式为

$$\left. \begin{aligned} Z^{k+1} &= Z^k + h \sum_{i=1}^2 b_i f(T_i) \\ T_i &= Z^k + h \sum_{j=1}^2 a_{ij} f(T_j) \end{aligned} \right\} \quad (1 \leq i \leq 2) \quad (8)$$

可以根据以上的公式得到四阶辛差分格式。式(8)中系数分别为

$$\begin{aligned} A = (a_{ij}) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3-2\sqrt{3}}{12} \\ \frac{3+2\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \\ B = (b_i) &= \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^T \end{aligned} \quad (9)$$

令式(8)中

$$T_1 = \{T_{11} \ T_{12}\}^T, T_2 = \{T_{21} \ T_{22}\}^T$$

则

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{12} \\ T_{21} \\ T_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X^K \\ Y^K \\ X^K \\ Y^K \end{bmatrix} - \\ &h \begin{bmatrix} a_{11}M^{-1}T_{12} + a_{12}M^{-1}T_{22} \\ [(a_{11} + a_{12})R + a_{11}CM^{-1}T_{12} \\ - a_{11}KT_{11} + a_{12}CM^{-1}T_{22} - a_{12}KT_{21}] \\ a_{21}M^{-1}T_{12} + a_{22}M^{-1}T_{22} \\ [(a_{21} + a_{22})R + a_{21}CM^{-1}T_{12} \\ - a_{21}KT_{11} + a_{22}CM^{-1}T_{22} - a_{22}KT_{21}] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

式(10)经整理可得

$$\begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{12} \\ T_{21} \\ T_{22} \end{pmatrix} = (I + hW)^{-1} \begin{pmatrix} X^K \\ Y^K - h(a_{11} + a_{12})R \\ X^K \\ Y^K - h(a_{21} + a_{22})R \end{pmatrix} \quad (11)$$

式中

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}, \quad W_{ij} = a_{ij} \begin{bmatrix} 0 & M^{-1} \\ -K & CM^{-1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

结合式(8)~式(12),可得

$$\begin{pmatrix} X^{k+1} \\ Y^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 0 & M^{-1} & 0 & M^{-1} \\ -K & CM^{-1} & -K & CM^{-1} \end{pmatrix} \cdot (I + hW)^{-1} \begin{pmatrix} X^K \\ Y^K \\ X^K \\ Y^K \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 0 & M^{-1} & 0 & M^{-1} \\ -K & CM^{-1} & -K & CM^{-1} \end{pmatrix} \cdot (I + hW)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ h(a_{11} + a_{12})R^{k+1} \\ 0 \\ h(a_{21} + a_{22})R^{k+1} \end{pmatrix} - \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ R^{k+1} + R^k \end{pmatrix} \quad (13)$$

以上给出的迭代格式可以直接用来求解动力学方程,并且整个计算过程是没有“人工阻尼”的,是保结构的。

3 以能量差为基础的等效线性法^[5]

物理系统振动过程是功和能在不断变化的过程,二者综合反映了广义力和广义位移的变化。因而以能量或功等效为原则对非线性系统进行线性化是比较合理的。按照这一原则,在确定性振动中,能量可获等价变换,从而可得精确解。在随机振动中,由于采用的是统计值,因而可按能量差平方统计最小进行变换,这样可以得到较高精度的解。

考虑具有随机激励的单自由度非线性系统,其动力学方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + g(x, \dot{x}) = F(t) \quad (14)$$

其中 $g(x, \dot{x})$ 为非线性项,如非线性的恢复力或阻尼力。建立与非线性系统等效的线性化方程为

$$m\ddot{x} + c_e\dot{x} + k_ex = F(t) \quad (15)$$

式中 c_e 和 k_e 分别为等效粘阻系数和等效刚度系数。把能量差定义为

$$e = U - U_e \quad (16)$$

其中 U 为真实系统的能量, U_e 为等效系统的能量,能量可以是势能、动能和功。

真实系统(14)的势能可以写为

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + \int_0^x g(x, \dot{x}) dx \quad (17)$$

等效系统(15)的势能可以写为

$$U_e = \frac{1}{2}k_ex^2 \quad (18)$$

$e(x, \dot{x})$ 作为 x 和 $\dot{x}$ 的函数,也是一个随机过程。选择 k_e 使 $e(x, \dot{x})$ 的均方值为最小,即要求

$$\frac{\partial E[e^2]}{\partial k_e} = 0 \quad (19)$$

将式(16)~式(18)代入式(19),可得

$$k_e = \frac{2E[x^2U]}{E[x^4]} \quad (20)$$

能量差也可以用阻尼力做功之差来表示为

$$e = W - W_e \quad (21)$$

真实系统(14)阻尼力做的功为

$$W = - \int_0^t [c\dot{x} + g(x, \dot{x})] \dot{x} dt \quad (22)$$

等效系统(15)阻尼力做的功为

$$W_e = - \int_0^t c_e \dot{x}^2 dt \quad (23)$$

选择 c_e 使 $e(x, \dot{x})$ 的均方值为最小,即要求

$$\frac{\partial E[e^2]}{\partial c_e} = 0 \quad (24)$$

将式(21)~(23)代入式(24),可得

$$c_e = - \frac{E\left[W \int_0^t \dot{x}^2 dt\right]}{E\left[\left(\int_0^t \dot{x}^2 dt\right)^2\right]} \quad (25)$$

求解过程是:先假定一组 c_e 和 k_e 值,代入(15)式算出 $E[x^2]$, $E\left[\int_0^t \dot{x}^2 dt\right]$,然后代入式(25)和式(20)解出经过修正的 c_e 和 k_e 。如此不断迭代,直到满足精度为止。把求得的 c_e 和 k_e 代入方程(15),根据虚拟激励方法,计算随机响应的统计特性。

4 算例

例1 求解单自由度达芬系统

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + 8kx^3 = F(t) \quad (26)$$

的随机响应. 设激励力 $F(t)$ 为白噪声过程, 已知其功率谱密度函数为 S_0 , 求平稳位移响应的均方值.

系统的非线性函数为

$$g(x, \dot{x}) = \varepsilon k x^3 \tag{27}$$

由式(17), 式(20) 和式(27) 可得

$$k_e = k(1 + 2.5 \varepsilon E[x^2]) \tag{28}$$

由式(22), 式(25) 和式(27) 可得

$$c_e = c \tag{29}$$

根据虚拟激励法, 有

$$E[x^2] = \alpha_x^2 = 2 \int_0^\infty |x|^2 d\omega \tag{30}$$

结合式(15) 和式(28) ~ 式(30), 根据虚拟激励法和四阶辛差分格式, 迭代求解, 直到获得满意的 c_e 和 k_e 为止. 然后, 求解方程(15) 得到随机响应的统计特性.

针对本例题, 在系统经过线性化之后, 求解响应可以有解析方法以及精细龙格库塔方法等多种方法. 具体的结果和方法的精度见表 1~ 表 4.

表 1 Equ 方法 $\varepsilon=0.01$
Table 1 Equ method $\varepsilon=0.01$

c	0.04	0.06	0.08	0.1	0.15	0.2
FPK	39.745 6	29.933 3	24.289	20.558 3	15.020 8	11.92
ANA_2	37.145 7	28.312 3	23.167 6	19.733 5	14.572 8	11.641 9
error1/ %	6.54	5.42	4.62	4.01	2.98	2.33
R_K	37.146 4	28.313 8	23.169 7	19.735 9	14.576 1	11.645 7
error2/ %	6.54	5.41	4.61	4.00	2.96	2.30
SYM	37.142 4	28.310 9	23.167 4	19.734	14.574 7	11.644 7
error3/ %	6.55	5.42	4.62	4.01	2.97	2.31

表 2 Ene 方法 $\varepsilon=0.01$
Table 2 Ene method $\varepsilon=0.01$

c	0.04	0.06	0.08	0.1	0.15	0.2
FPK	39.745 6	29.933 3	24.289	20.558 3	15.020 8	11.92
ANA_2	39.511 3	29.943 9	24.393 7	20.701 8	15.181 8	12.067 4
error1/ %	0.59	0.04	0.43	0.70	1.07	1.24
R_K	39.512 4	29.945 7	24.396 0	20.704 5	15.185 4	12.071 6
error2/ %	0.59	0.04	0.44	0.71	1.10	1.27
SYM	39.508 2	29.942 7	24.393 6	20.702 5	15.184	12.070 6
error3/ %	0.60	0.03	0.43	0.70	1.09	1.26

表 3 Equ 方法 $\varepsilon=0.1$
Table 3 Equ method $\varepsilon=0.1$

c	0.04	0.06	0.08	0.1	0.15	0.2
FPK	16.485 5	13.061 9	11.032 7	9.655 53	7.532 78	6.283 14
ANA_2	14.599 1	11.649 1	9.895 2	8.701 4	6.853 4	5.758 8
error1/ %	11.44	10.82	10.31	9.88	9.02	8.35
R_K	14.604 6	11.649 0	9.895 2	8.701 5	6.175 6	5.759 2
error2/ %	11.41	10.82	10.31	9.88	18.02	8.34
SYM	14.602 9	11.646 6	9.893 3	8.7	6.852 6	5.758 4
error3/ %	11.42	10.83	10.33	9.90	9.03	8.35

表 4 Ene 方法 $\varepsilon=0.1$
Table 4 Ene method $\varepsilon=0.1$

c	0.04	0.06	0.08	0.1	0.15	0.2
FPK	16.485 5	13.061 9	11.032 7	9.655 53	7.532 78	6.283 14
ANA_2	15.837	12.609 6	10.691 7	9.387	7.368 9	6.175 1
error1/ %	3.93	3.46	3.09	2.78	2.18	1.72
R_K	15.836 5	12.609 5	10.691 7	9.387 1	7.369 2	6.175 6
error2/ %	3.94	3.46	3.09	2.78	2.17	1.71
SYM	15.834	12.607	10.689 8	9.385 6	7.368 2	6.174 8
error3/ %	3.95	3.48	3.11	2.80	2.18	1.72

另外,作为比较,后面的结果中包含了以方程差为基础的等效线性化方法结合保辛算法得到的结果,从而验证了以能量差为基础的等效线性化方法的优点.

令 $m=1, c=0.04, k=1, \varepsilon=0.01, S_0=1$, 计算等效刚度 k_e 和位移方差 σ_x^2 , 得到结果如图 1 和图 2 所示:

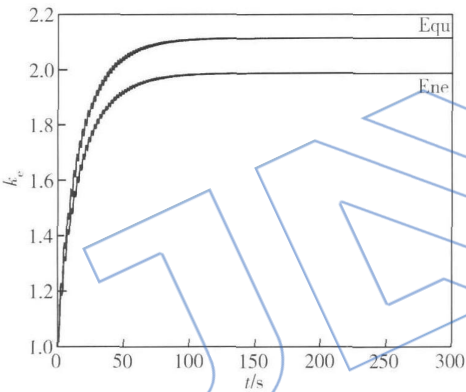


图 1 辛差分格式计算等效刚度

Fig 1 Stiffness calculation by symplectic geometry algorithm

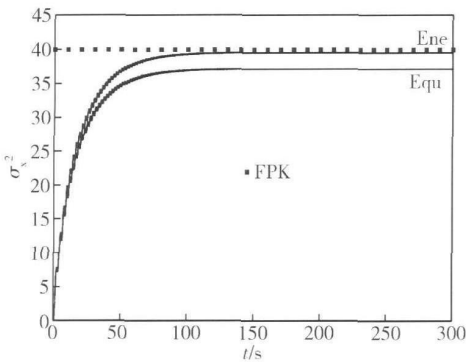


图 2 辛差分格式与 FPK 方程方法计算位移方差

Fig 2 Displacement variance calculation by symplectic geometry algorithm and FPK method

图 2 中, FPK 表示针对非线性问题用 FPK 方法算出来方差的精确结果, Equ 方法是用以方程差为基础的等效线性化法计算, Ene 方法是用以能量差为基础的等效线性化法计算.

在表 1~ 表 4 中, 列出了几种条件下的非线性随机振动响应方差结果, 包括 FPK 方程方法精确解, 分别结合解析方法、精细龙格库塔方法、四阶辛差分格式与以方程差为基础的等效线性化方法, 以及以能量差为基础的等效线性化方法的数值结果及误差.

表 1 至表 4 中的 c 表示阻尼系数, FPK 表示针对非线性问题用 FPK 方法算出来方差的精确结果, Equ 方法是用以方程差为基础的等效线性化法计算, Ene 方法是用以能量差为基础的等效线性化法计算. 针对线性化问题, ANA 表示系统线性化后, 用解析的方法计算方差, R_K 表示用精细龙格库塔方法计算方差, SYM 表示用保辛方法计算方差, 其中 R_K 方法和 SYM 方法都使用四阶格式. error1, error2, error3 分别表示 ANA 方法、R_K 方法和 SYM 方法三种方法计算的结果相对 FPK 方程方法计算的精确解的误差. 这里各个变量都进行了无量纲化处理.

比较表 1 和表 2, 可以看到, 以能量差为基础的等效线性法的精度远远高于以方程差为基础的等效线性法的精度. 分别比较表 1 和表 3, 以及表 2 和表 4, 可以看到, 非线性的程度增加之后以能量差为基础的等效线性法的精度仍然很高. 而在弱非线性、小阻尼情况下, 结果几乎接近精确解. 这反映出了以能量差为基础的等效线性法的优越性.

针对线性化方程的响应求解问题, 三种方法: ANA 方法、R_K 方法和 SYM 方法计算得到的结果基本一致. 但是从大多数结果的尾数上可以反

映出 SYM 方法计算得到的结果更接近 ANA 方法计算得到的结果。

例 2 二自由度剪切型多自由度 Duffing 系统, 其运动微分方程为

$$M\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} + \mathbf{G} = \mathbf{f}(t) \tag{31}$$

其中

$$\mathbf{G} = \begin{Bmatrix} \mu_1 k_1 x_1^3 - \mu_2 k_2 x_2^3 \\ \mu_2 k_2 x_2^3 \end{Bmatrix} \tag{32}$$

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y^1 \\ y^2 - y^1 \end{Bmatrix} \tag{33}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \{\mu_1, \mu_2\}^T \tag{34}$$

作用侧向平稳随机激励作用, 可表为

$$\mathbf{f}(t) = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x(t) \\ x(t+T) \end{Bmatrix} \tag{35}$$

$f_2(t)$ 比 $f_1(t)$ 有 $T = 1.0\text{ s}$ 的时间滞后。 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的自谱密度皆为 $S_0 = 2.5 \times 10^{-3} \text{ kN}^2 \cdot \text{s}$, 该系统其他参数如下:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1.0 & \\ & 1.0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.44 & -0.12 \\ -0.12 & 0.26 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 250.0 & -100.0 \\ -100.0 & 100.0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$$

首先, 选取不同大小的 μ , 分别利用以方程差为基础的等效线化法、以能量差为基础的等效线化法对非线性系统线性化;

其次, 结合虚拟激励法和四阶辛差分格式计算系统位移方差, 并用蒙特·卡罗法检验精度. 结果如下所示.

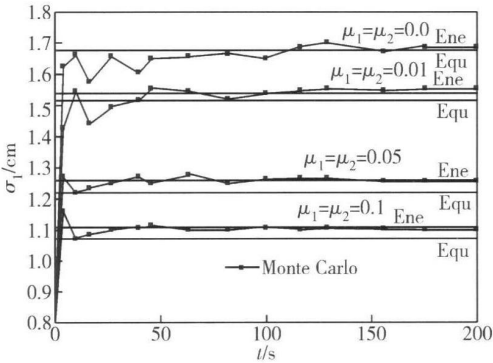


图 3 第一个自由度位移标准差

Fig 3 Displacement standard deviation of the first DOF

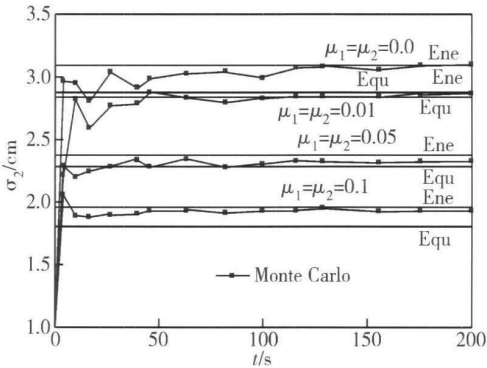


图 4 第二个自由度位移标准差

Fig 4 Displacement standard deviation of the second DOF

表 5 第一个自由度位移标准差精度

Table 5 Displacement standard deviation precision of the first DOF

$\mu_1 = \mu_2$	Equ/ %	Ene/ %
0.0	0.54	0.54
0.01	2.32	0.89
0.05	2.81	0.35
0.1	2.42	0.88

表 6 第二个自由度位移标准差精度

Table 6 Displacement standard deviation precision of the second DOF

$\mu_1 = \mu_2$	Equ/ %	Ene/ %
0.0	0.11	0.11
0.01	0.84	0.41
0.05	1.75	2.16
0.1	6.43	1.58

通过蒙特·卡罗法的检验, 可以发现, 在大多数情况下, 以能量差为基础的等效线化法方法精度要高于以方程差为基础的等效线化法方法的精度. 尤其是在非线性程度增大的情况下, 除了个别情况, 效果会更加明显. 另外, 通过四阶辛差分格式进行动力方程积分求响应也得到了满意的结果.

5 结 论

结合以能量差为基础的等效线性化方法、虚拟激励法和四阶辛差分格式来求解 Duffing 系统的随机响应问题, 算法效率高, 结果精度高. 可以想象对于随机系统的长期行为分析, 辛差分格式将会体现出强大的优越性.

基于虚拟激励法、保辛算法和能量等效线性化方法, 进一步发展更复杂的非线性系统的随机响应的求解方法, 并将此方法推广到工程领域, 解决实际问题, 还需要进一步妥善解决.

参考文献:

[1] 林家浩, 张亚辉. 随机振动的虚拟激励法[M]. 北京: 科学出版社, 2004.

[2] 冯康, 秦孟兆. 哈密尔顿系统的辛几何算法[M]. 浙江: 浙江科学技术出版社, 2003.

[3] 钟万勰, 姚征. 时间有限元与保辛[J]. 机械强度. 2005, 27(2): 178-183.
ZHONG Wanxie, YAO Zheng. Time domain FEM and symplectic conservation [J]. Journal of Mechanical Strength, 2005, 27(2): 178-183.

[4] 余德浩. 有限元、自然边界元与辛几何算法[J]. 高等数学研究, 2001, 4(4): 17-23

[5] Elishakoff I, Zhang X T. An appraisal of different stochastic linearization techniques[J]. Journal of Sound and Vibration, 1992, 153: 370-375.